Równania wielomianowe

1 Reakcja chemiczna zależy od obecności katalizatora. Jeśli nie ma katalizatora, nie będzie reakcji, ale jeśli jest zbyt dużo katalizatora, reakcja przestaje przebiegać poprawnie, a produkt jest zanieczyszczony i nie można go wykorzystać. W danym procesie produkcyjnym ilość produktu wytworzonego na jednostkę katalizatora jest powiązana z ilością x obecnego katalizatora zgodnie z równaniem $r(x) = 160 - x$. Jeśli

$$W(x) = \frac{x^2}{3} + 50x + 1400$$

jest ilością wytworzonego produktu zanieczyszczonego, $R(x)$ jest całkowitą ilością wytworzonego czystego i zanieczyszczonego produktu, a $P(x)$ to ilość wytworzonego czystego produktu:

(a) Znajdź równania $R(x)$ i $P(x)$, oba wyrażone jako funkcje x.

(b) Określ ilość jednostek katalizatora z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, dla której proces przestaje przebiegać poprawnie i nie jest wytwarzany czysty produkt oraz wyznacz odpowiadającą jej wielkość $r(x)$.

(c) Określ ilość jednostek katalizatora z dokładnością do jednego miejsca po przecinku, dla której ilość wytworzonego czystego produktu wynosi 200 jednostek.

(d) Chemik bada teraz nowy proces reakcji, w którym całkowita ilość wytworzonego zanieczyszczonego produktu jest funkcją liniową ilości katalizatora x. Jeśli w tym procesie reakcja przestaje przebiegać poprawnie przy 10 i 70 jednostkach katalizatora, określ nową ilość czystego produktu jako funkcję x.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Producent rejestruje stały roczny popyt na swój produkt w ilości 600 sztuk. Produkty są wytwarzane na linii produkcyjnej w seriach o jednakowej wielkości partii. Produkcja jest ciągła i liniowa; zaraz po zakończeniu jednej partii rozpoczyna się produkcja kolejnej. Wytworzenie jednej sztuki produktu zajmuje 6 roboczogodzin, a przygotowanie partii, niezależnie od jej wielkości, zajmuje 10 roboczogodzin. Na podstawie wcześniejszych doświadczeń producent przyjmuje możliwe opóźnienia w przygotowaniach partii. Zakłada się, że całkowity roczny czas przygotowania to 20% czasu potrzebnego do wyprodukowania pojedynczej sztuki produktu pomnożonego przez połowę wielkości partii.

Jeśli:

- wielkość partii oznaczamy jako b sztuk;
- opóźnienie roczne w przygotowaniu jednej sztuki produktu oznaczamy jako h roboczogodzin;
- czas przygotowania do produkcji każdej partii oznaczamy jako s roboczogodzin;
- roczny popyt oznaczamy jako d sztuk;
- czas potrzebny do wyprodukowania jednej sztuki produktu to t roboczogodzin;
- całkowity roczny czas poświęcony na produkcję to T roboczogodzin, gdzie:

T = roczny czas produkcji + roczny czas przygotowania + roczny czas opóźnień w przygotowaniach.

(a) Wykaż, że

$$T = td + \frac{sd}{b} + \frac{hb}{2}.$$

(b) Znajdź całkowity czas T, jeśli wielkość partii to:

(i) 25 sztuk,

(ii) 50 sztuk.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

---

3 W zadaniu nr 2 znajdź wielkość partii, gdy całkowity czas T = 3720 roboczogodzin.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

---

1 (a) $R(x) = 160x - x^2$, $P(x) = -\frac{4x^3}{3} + 110x - 1400$

(b) $x = 66{,}8;\ 15{,}7;\ r(66{,}8) = 93{,}2$ oraz $r(15{,}7) = 144{,}3$

(c) $x = 63{,}7;\ 18{,}9$

(d) $P(x) = -x^2 + 80x - 700$

Pytanie **Rozwiązanie**

---

2 (b) (i) $T = 3855$
(ii) $T = 3750$

Pytanie Rozwiązanie

3 100

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 (a) Ilość wytworzonego produktu to ilość obecnego katalizatora pomnożona przez ilość produktu wytworzonego na jednostkę katalizatora.

Zatem

$$R(x) = xr(x) = x(160 - x) = 160x - x^2.$$

Ilość czystego produktu to różnica między całkowitą ilością produktu a ilością produktu zanieczyszczonego. Zatem:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - W(x) \\ &= (160x - x^2) - \left(\frac{x^2}{3} + 50x + 1400\right) \\ &= -\frac{4x^2}{3} + 110x - 1400. \end{aligned}$$

(b) Reakcja przestaje przebiegać poprawnie, gdy ilość czystego produktu wynosi zero, czyli kiedy

$$-\frac{4x^2}{3} + 110x - 1400 = 0.$$

Dzieje się tak, gdy

$$x = \frac{-110 \pm \sqrt{(110)^2 - 4 \cdot (-4/3) \cdot (-1400)}}{2 \cdot (-4/3)},$$

czyli gdy

$$x = \frac{-110 \pm 68{,}07}{-(8/3)} = 66{,}78 \text{ oraz } 15{,}72,$$

to jest 66,8 i 15,7 jednostek katalizatora.

Przekłada się to na wartość $r(x)$:

$$r(66{,}8) = 160 - 66{,}8 = 93{,}2$$

oraz $r(15{,}7) = 160 - 15{,}7 = 144{,}3$.

(c) Kiedy $P(x) = -\dfrac{4x^2}{3} + 110x - 1400 = 200$, wtedy

$$-\frac{4x^2}{3} + 110x - 1600 = 0,$$

a zatem

$$x = \frac{-110 \pm \sqrt{110^2 - 4 \cdot (-4/3) \cdot (-1600)}}{-(8/3)}$$

$$= \frac{-110 \pm 59{,}72}{-(8/3)} = 63{,}65 \text{ oraz } 18{,}86,$$

czyli $x = 63{,}7$ i $x = 18{,}9$ jednostek katalizatora.

(d) Chemik bada teraz nowy proces reakcji, w którym całkowita ilość wytworzonego zanieczyszczonego produktu jest funkcją liniową ilości katalizatora x. Jeśli w tym procesie reakcja przestaje przebiegać poprawnie przy 10 i 70 jednostkach katalizatora, określimy nową ilość czystego produktu jako funkcję x.

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - W(x) \\ &= (160x - x^2) - (ax + b) \\ &= -x^2 + (160 - a)x - b \\ &= -(x - 10)(x - 70), \end{aligned}$$

więc

$$-x^2 + (160 - a)x - b = -(x - 10)(x - 70) = -x^2 + 80x - 700,$$

zatem

$$(160 - a)x - b = 80x - 700,$$

co daje $a = 80,\ b = 700$

i stąd $W(x) = 80x + 700$.

Konsekwentnie:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - W(x) \\ &= (160x - x^2) - (80x + 700) \\ &= -x^2 + 80x - 700. \end{aligned}$$

Pytanie Odpowiedź

2 (a) Roczny czas produkcji to czas produkcji jednej sztuki produktu pomnożony przez liczbę wyprodukowanych sztuk, czyli td roboczogodzin.

Roczny czas przygotowania to czas przygotowania jednej partii s pomnożony przez liczbę partii wyprodukowanych w ciągu roku. Liczbę partii wyprodukowanych w ciągu roku uzyskuje się z liczby wyprodukowanych sztuk w roku podzielonej przez liczbę sztuk w partii, czyli d/b. Zatem roczny czas przygotowania wynosi

$\frac{sd}{b}$ roboczogodzin.

Całkowity roczny czas opóźnień w przygotowaniach to opóźnienie roczne w przygotowaniach jednej sztuki, czyli h, pomnożone przez połowę wielkości partii, czyli $b/2$. Roczne opóźnienie przygotowania produkcji wynosi zatem

$\frac{hb}{2}$ roboczogodzin.

Daje to całkowity roczny czas w roboczogodzinach:

$$T = td + \frac{sd}{b} + \frac{hb}{2}$$

(b) (i) Wielkość partii to $b = 25$ sztuk.
Opóźnienie w przygotowaniu jednej sztuki to

$$h = 6 \cdot \frac{20}{100} = 1{,}2 \text{ roboczogodzin.}$$

Czas przygotowania partii to $s = 10$ roboczogodzin.
Roczne zapotrzebowanie na produkt to $d = 600$ sztuk.
Czas potrzebny do wyprodukowania jednej sztuki to $t = 6$ roboczogodzin.

W związku z tym:

$$T = 6 \cdot 600 + \frac{10 \cdot 600}{25} + \frac{1{,}2 \cdot 25}{2} = 3855 \text{ roboczogodzin.}$$

(ii) Wielkość partii to $b = 50$ sztuk.
Opóźnienie w przygotowaniu jednej sztuki to

$$h = 6 \cdot \frac{20}{100} = 1{,}2 \text{ roboczogodzin.}$$

Czas przygotowania partii to $s = 10$ roboczogodzin.
Roczne zapotrzebowanie na produkt to $d = 600$ sztuk.
Czas potrzebny do wyprodukowania jednej sztuki to $t = 6$ roboczogodzin.

W związku z tym:

$$T = 6 \cdot 600 + \frac{10 \cdot 600}{50} + \frac{1{,}2 \cdot 50}{2} = 3750 \text{ roboczogodzin.}$$

3 $T = 3720$. Ponieważ $T = td + \frac{sd}{b} + \frac{hb}{2}$, to

$$3720 = 6 \cdot 600 + \frac{10 \cdot 600}{b} + \frac{1{,}2 \cdot b}{2}.$$

Zatem

$3720b = 3600b + 6000 + 0{,}6b^2$, stąd $0{,}6b^2 - 120b + 6000 = 0$.

Tak więc

$b^2 - 200b + 10\,000$, co daje $b = \frac{200 \pm \sqrt{40\,000 - 40\,000}}{2} = 100$ jednostek.

Pytanie **Odpowiedź**